

COMPUTERKUNST

Jos Leys – Meister der fraktalen Kunst

In Zusammenarbeit mit verschiedenen Forschern setzt der belgische Ingenieur die abstraktesten Erkenntnisse in spektakuläre Bilder um.

Von Christoph Pöppe

Auf den ersten Blick ist Jos Leys, ein 53-jähriger Ingenieur aus der Nähe von Antwerpen (Belgien), nur einer von mehr als hundert handverlesenen Künstlern, deren besonders bedeutende Fraktale, zu einem *infinite fractal loop* verknüpft, auf der Website <http://www.fractalus.com/ifl/> zu finden sind. Auch die Tatsache, dass er als Hilfsmittel die vielseitige, im Netz erhältliche Software Ultrafractal verwendet, hebt ihn noch nicht aus der Masse hervor. Ungewöhnlich ist vielmehr, dass er über das populäre Thema »Fraktale« hinaus aktuelle

mathematische Entwicklungen aufgreift und in Bilder umsetzt, die nicht nur den Sachverhalt erklären, sondern den Rang von Kunstwerken haben.

In Einzelfällen wirken seine Werke sogar auf die Wissenschaft zurück. Mathematiker nutzen zunehmend den Computer, um sich von gewissen Dingen, über die sie am Ende Theoreme beweisen wollen, erst einmal einen Überblick zu verschaffen – durch ziemlich konkrete Anschauung auf dem Bildschirm. Mittlerweile ist manch ein abstrakter Sachverhalt auf diesem Weg zuerst erkannt und erst im Nachhinein mit klassischen Mitteln bewiesen worden.

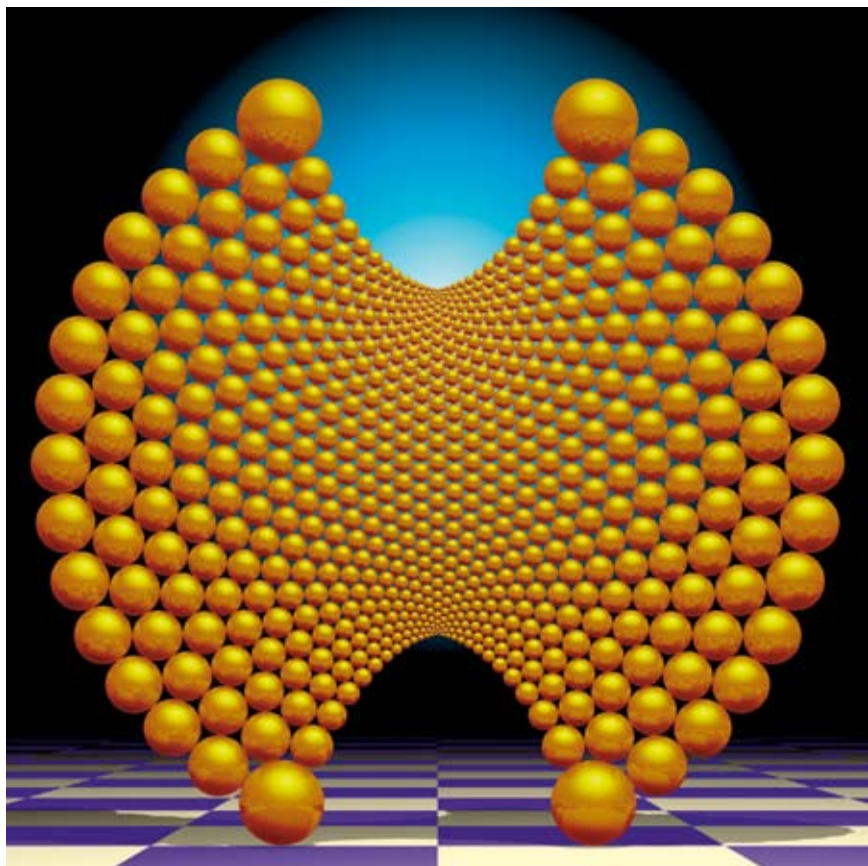
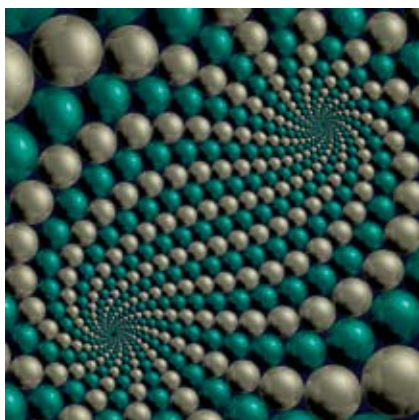
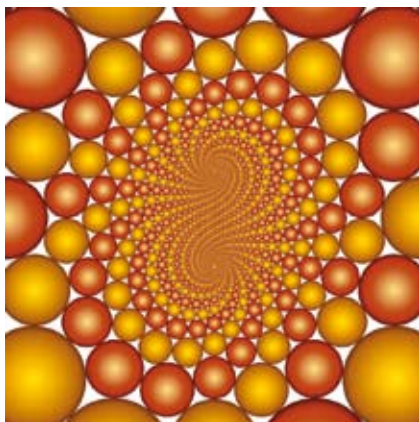
Zu diesem Unterfangen leistet Jos Leys wesentliche Beiträge.

Ein spektakuläres Beispiel für diese Art experimenteller Mathematik sind die neueren Arbeiten über Klein'sche Gruppen von David Mumford, Caroline Series und David Wright. Auch hierzu hat Jos Leys eine Fülle ansprechender Bilder zu bieten.

Ein eher spielerisches Beispiel sind die hexagonalen Kreispackungen. Es geht darum, die Ebene mit Kreisen so zu füllen, dass sich benachbarte Kreise stets berühren. Für lauter gleich große Kreise ist das sehr einfach: Jeder Kreis hat genau sechs Nachbarn, und so machen das die Bienen auch.

Weniger bekannt ist, dass das auch mit ungleichen Kreise funktioniert. Um ▷

▲ Aus einer Doyle'schen spiralförmigen Kreispackung hat Jos Leys durch Inversion am Kreis eine doppelt-spiralige gemacht (links oben). Noch schöner wurden seine Bilder dadurch, dass er die Kreise zu spiegelnden Kugeln veredelte (links unten) und ein anderes Spiralenmuster darüber hinaus räumlich deformierte (großes Bild).



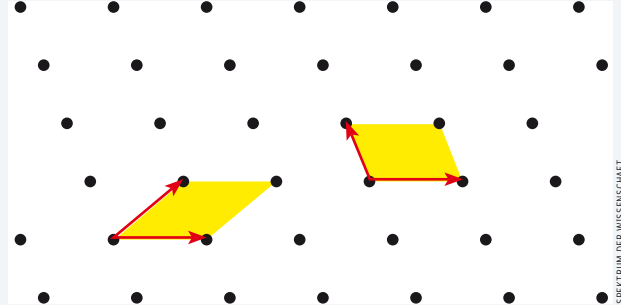
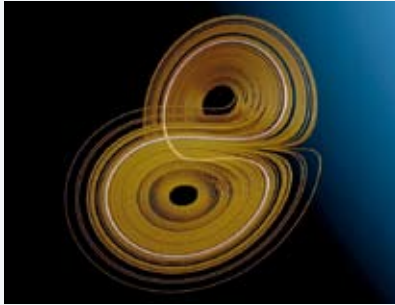
ALLE ABILDUNGEN DIESES ARTIKELS (SO FERN NICHT ANDERS ANGEZEIGT): JOS LEYS

▷ einen Kreis mit Radius 1 passen lückenlos sechs Kreise, deren Radien der Reihe nach a , b , b/a , $1/a$, $1/b$ und a/b betragen. Wenn darüber hinaus noch für gewisse natürliche Zahlen n und m die Gleichung $a^n = b^m$ gilt, lässt sich diese

Anordnung zu einer unendlichen Kreispackung in der Ebene fortsetzen, ohne dass sich irgendwo Kreise überschneiden. Diese »Doyle'schen Spiralen« haben aus den verschiedensten Gründen viel Aufmerksamkeit gefunden (Kreispackun-

gen sind ein Thema mit vielen Verzweigungen). Jos Leys hat diese hübschen Muster durch mathematische Transformationen und – von der Software bereitgestellte – Spiegelungseffekte noch erheblich veredelt (Bilder S. 105).

VOM CHAOS ZUM GITTER: ÜBERRASCHENDEN AUS DER KNOTENTHEORIE



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

EIN KLASSISCHES THEMA DER CHAOSTHEORIE ist der Lorenz-Attraktor (Bild oben, links). Das zugehörige Bewegungsgesetz (eine gewöhnliche Differenzialgleichung) veranlasst einen Punkt im dreidimensionalen Raum, sich in die Nähe der merkwürdigen »Schmetterlingsflügel« zu begeben und dort für alle Zeiten herumzuwandern, in unvorhersagbarer Weise von einem Flügel zum anderen wechselnd. Für spezielle Anfangspositionen ergibt sich eine periodische Bahn, das heißt, der Punkt durchläuft eine geschlossene Kurve immer wieder (hervorgehoben im obigen Bild).

Die Topologen bezeichnen geschlossene Kurven im Raum als »Knoten« und scheren sich nicht um deren genaue Lage, so als wäre die periodische Bahn des Punktes ein ringförmiges Stück Schnur, das man beliebig manipulieren darf; nur Aufschneiden und Wiederausammenfügen sind verboten. Erstaunlicherweise liefert diese etwas eingeschränkte Sicht der Dinge wertvolle Auskünfte.

So darf man, wenn man sich die Freiheit nimmt, die Bahnen etwas zu deformieren, die schwierige Dynamik des Lorenz-Systems durch eine einfachere ersetzen (Bild oben, Mitte): Von einer Strecke (rot, in der Bildmitte) gehen nach rechts zwei Papierstreifen ab, einer oben, einer unten. Die beiden Streifen ersetzen die Flügel des Lorenz-Attraktors. Sie verlaufen irgendwie durch den Raum und werden dabei allmählich breiter, bis sie beide, auf die doppelte Breite angewachsen, wieder von links in die Strecke einmünden – als zwei übereinanderliegende Blätter Papier. Der Punkt bewegt sich auf den Papieren strikt in Längsrichtung, wobei er deren Verbreiterung mitmacht. Im Effekt kommt ein Punkt, der in der Entfernung x , vom unteren Endpunkt der Strecke aus gemessen, die Strecke verlässt, in der Entfernung $2x$ zurück – allerdings modulo der Streckenlänge, das heißt, man nimmt $2x$ minus der Streckenlänge statt $2x$, wenn der Punkt nach oben davonzulaufen droht.

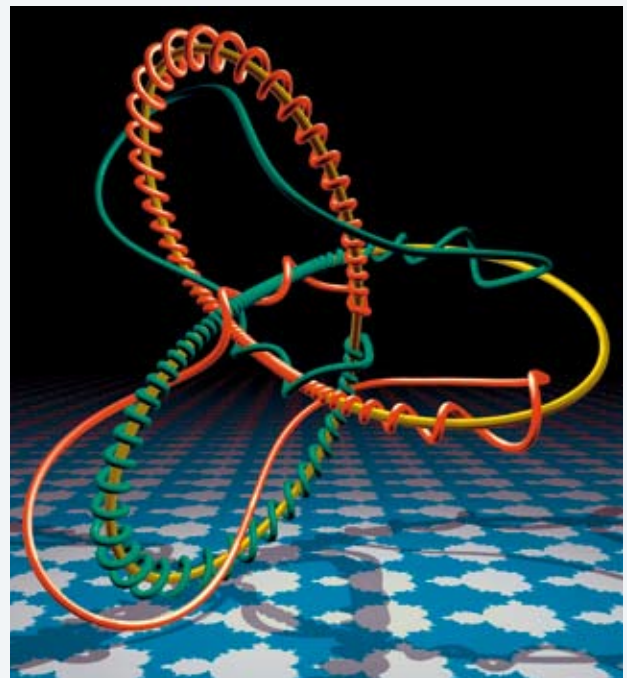
EINE ANDERE KLASSE MATHEMATISCHER OBJEKTE hat auf den ersten Blick rein gar nichts mit dem Lorenz-Attraktor zu tun: Gitter in der Ebene. Man nehme zwei Vektoren und dazu alle Punkte, die man aus dem Nullpunkt durch beliebig häufiges Verschieben mit diesen Vektoren erzeugen kann (Bild oben, rechts).

Wenn man die erzeugenden Vektoren verändert, bewegt sich das gesamte Gitter. Aber Deformationen eines Gitters sind durch

Bewegungen der erzeugenden Vektoren nur unvollkommen zu beschreiben. Durch manche Deformationen wird ein Gitter auf sich selbst abgebildet, nicht aber die erzeugenden Vektoren, denn verschiedene Vektorenpaare können, wie im Bild angegeben, dasselbe Gitter beschreiben.

Nach verschiedenen Umformungen stellt sich heraus: Am besten stellt man ein Gitter als Punkt dar, der in einem dreidimensionalen Raum mit Ausnahme eines Kleeblattknotens liegt. Die Deformation eines Gitters entspricht der Bahn eines Punktes in diesem Raum, und wenn das Gitter seine ursprüngliche Form wieder annimmt, ist es eine geschlossene Bahn – ein Knoten, der sich irgendwie um den Kleeblattknoten windet (Bild unten).

Überraschenderweise sind diese Knoten (bis auf Deformationen) identisch mit den oben beschriebenen Knoten (periodischen Bahnen) des Lorenz-Attraktors.



Dem niederländischen Mathematiker Hendrik W. Lenstra ist es gelungen, ein Werk seines Landsmanns, des Zeichners Maurits C. Escher (1898–1972), nachzubessern. In »Bildgalerie« (»Prenten-tentoonstelling«, 1956) betrachtet ein

Mensch ein Bild einer Landschaft, zu der er irgendwie selbst gehört; nur musste Escher in der Mitte seines Werks noch einen weißen Fleck lassen. Lenstra entwickelte in Fortführung von Eschers Ideen eine Methode, die Lücke mit einer

unendlichen Spirale zu füllen. Dieses Verfahren hat Jos Leys zu einer Methode erweitert, beliebig viele andere Bilder mit Spiralstruktur und Unendlichkeit zugleich auszustatten (Kasten auf dieser Seite).

Den »Ritterschlag« der *mathematical community* erhielt Jos Leys auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Madrid im vergangenen August. Étienne Ghys von der École normale supérieure in Lyon hat einen überraschenden Zusammenhang zwischen zwei eigentlich weit entfernten Gegenständen der Mathematik aufgedeckt: einerseits dem Lorenz-Attraktor, jener merkwürdigen, unendlich vielblättrigen Teilmenge des dreidimensionalen Raums, der alle Lösungen einer gewissen Differenzialgleichung zustreben und die deswegen zu einem Lieblingsobjekt der Chaostheoretiker geworden ist; andererseits den unendlichen regelmäßigen Gittern in der Ebene (Kasten S. 106).

Die Verbindung verläuft über ein drittes Gebiet, die Knotentheorie; das einzusehen erfordert zumindest in Bezug auf die Gitter einen nicht ganz einfachen Abstraktionsprozess. Aber nachdem die Gegenstände beider Theorien zu Knoten in einem dreidimensionalen Raum verwandelt wurden, sind sie von geradezu handgreiflicher Anschaulichkeit.

Nur ist es aussichtslos, die Äquivalenz zweier solcher Knoten nachprüfen zu wollen, indem man mit echten Schnüren herumfummelt. Da hilft die von Jos Leys erarbeitete visuelle Darstellung.

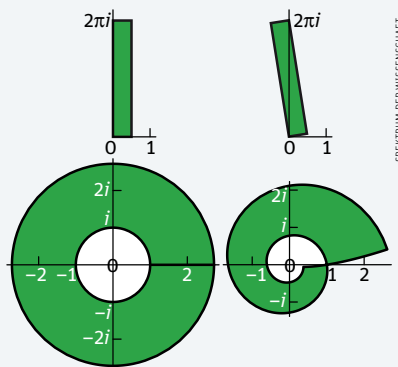
In einem Hauptvortrag auf dem genannten Kongress hat Étienne Ghys vor den Augen des staunenden Publikums die Knoten tanzen lassen. Eine schriftliche Fassung mit bewegten Bildern findet sich auf der Website von Jos Leys, die noch viele andere schöne Dinge zu bieten hat. ◀

DIE EXPONENTIALFUNKTION ALS ABBILDUNGSHILFE

DIE BERÜHMTE FORMEL $e^{2\pi i}=1$ erweist ihre Nützlichkeit, wenn es darum geht, Spiralbilder der besonderen Art zu konstruieren. Da auch $e^0=1$ ist, bildet die (komplexe) Exponentialfunktion die beiden komplexen Zahlen 0 und $2\pi i$ auf dieselbe Zahl ab: die Eins. Was dazwischen ist, landet auf dem Umfang eines Kreises. Ein achsenparalleles Rechteck mit der Höhe 2π (links oben im Bild rechts) wird zu einem Kreisring (links unten).

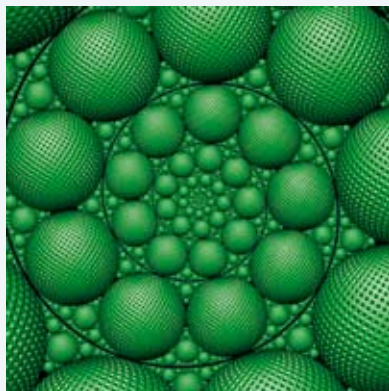
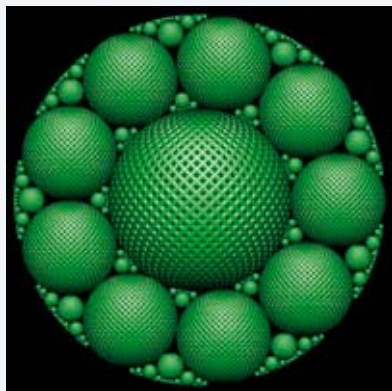
Mit derartigen Rechtecken kann man die Ebene pflastern. Obere und untere Nachbarn unseres Rechtecks werden auf denselben Kreisring abgebildet. Aus einem rechten Nachbarn wird ein größerer Ring, der den bisherigen genau umschließt, aus einem linken Nachbarn ein präzise eingepasster Kreisring.

Wenn man das Rechteck kippt und etwas verkleinert, sodass 0 und $2\pi i$ gegenüberliegende Ecken werden (rechts oben), ist das Bild unter der Exponentialfunktion ein Schneckenstück (darunter). Aber auch mit gekippten Rechtecken kann man die Ebene pflastern.



Man nehme einen Kreisring und deformiere ihn durch Anwendung des Logarithmus (der Umkehrung der Exponentialfunktion) zu einem Rechteck, dessen Ober- und Unterkante aneinanderspinnen. Dann pflastere man die komplexe Ebene mit gekippten Exemplaren des Rechtecks, wende die Exponentialfunktion an – und die Schneckenstücke fügen sich zu einer lückenlosen, im Prinzip unendlichen Spirale (Bildpaar unten).

Das Verfahren ist von Kreisringen auf rechteckige Rahmen erweiterbar (Bildpaar ganz unten).



Christoph Pöppe ist Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Jos Leys, un artiste géomètre. Von Jean-Paul Delahaye in: Pour la Science, April 2006, S. 90

Indra's Pearls. The Vision of Felix Klein. Von David Mumford, Caroline Series und David Wright. Cambridge University Press, Cambridge 2002

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/860744.