Jos Leys, un artiste géomètre

L'ordinateur est une lunette pour observer l'univers mathématique ; les images qu'il nous en donne sont d'une fulgurante beauté.

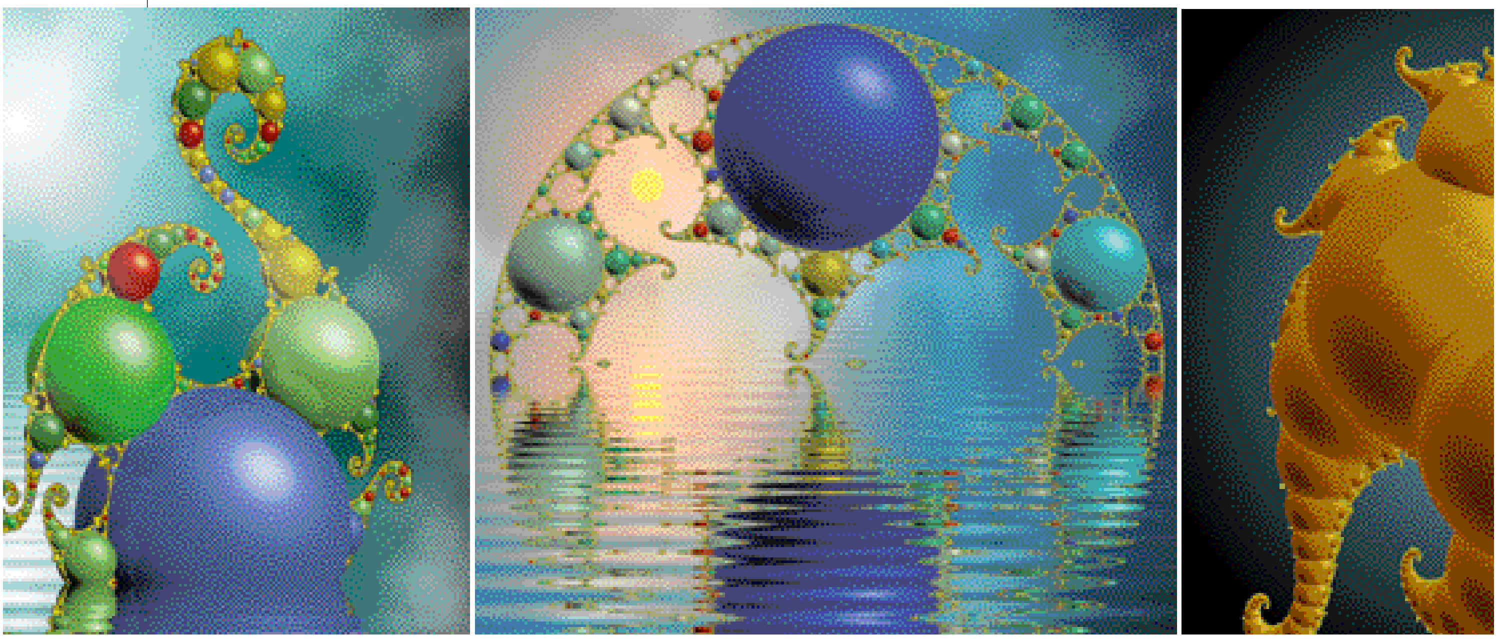
Parfois le chercheur imagine un objet ou une structure, l'étudie, en démontre des propriétés, mais ne réussit pas à s'en faire une représentation précise. Ce fut le cas des fonctions continues sans dérivées imaginées en 1872 par Karl Weierstrass. Puis cette impossibilité est réapparue pour les courbes inscrites dans une surface d'aire bornée et d'une longueur infinie (dont le fameux flocon que Von Koch conçut en 1904) et pour nombre d'autres objets tératologiques que la topologie, l'analyse et la géométrie de cette époque identifièrent sans réussir à les dessiner : les images que les mathématiciens tentaient d'obtenir à la main en simplifiaient trop l'aspect.

L'ordinateur, qui est une lunette pour voir dans l'univers mathématique, a changé tout cela, et aujourd'hui tout le monde connaît les « fractales » (le mot fut créé en 1975 par Benoît Mandelbrot) qui sont justement nées de la volonté de visualiser les objets infiniment découpés dont la topologie avait énoncé l'existence et décrit certaines propriétés.

Nous sommes surpris par l'incroyable esthétique de ces paysages mathématiques que le calcul capture. Un domaine artistique nouveau est né, fonctionnant à l'écart des courants commerciaux. Cet art mathématique est considéré comme secondaire bien qu'il soit pratiqué par des milliers de passionnés qui créent de nouveaux algorithmes, se les échangent et exposent leurs résultats sur Internet où leurs œuvres sont offertes à tous(http ://www.fractalus.com/cgi-bin/glist).

Anvers, capitale du diamant mathématique

Ce fonctionnement social nouveau est sans doute ce qui gêne les milieux traditionnels de l'art, réticents vis-à-vis de cette création numérique et populaire. Ceux qui la pratiquent n'en tirent aucun profit alors que pourtant ils donnent naissance à bien plus d'œuvres et de magnificences que l'art officiel exposé dans les musées et dont les productions sont achetées à coup de millions d'euros aux frais du contribuable.



1. La théorie de ces figures, abordée il y a plus d'un siècle par Felix Klein, a été approfondie récemment par David Mumford, Caroline Series et David Wright. Elle est exposée dans un livre mathématique d'un genre nouveau où les images d'ordinateurs jouent un rôle central (*Indra's Pearl : The Vision of Felix Klein,* Cambridge University Press, 2002.) Les objets merveilleux que ce livre présente ont été une source d'inspiration pour Jos Leys qui en a tiré quelques-unes de ces mystérieuses images.

Parmi les artistes utilisant l'ordinateur comme pinceau et les mathématiques comme moteur de l'imagination, l'ingénieur anversois Jos Leys a réussi en quelques années à créer une œuvre originale puisant son énergie dans toutes sortes d'idées récentes empruntées au monde de la recherche. En menant un travail exceptionnel qui reste proche des abstractions théoriques nourrissant sa créativité, Jos Leys avec une application et une détermination sans égales nous dévoile les joyaux insoupçonnés cachés dans l'univers mathématique ; il les extrait à coup de calculs informatiques, parfois massifs, et les dépose comme par magie sur l'écran de nos ordinateurs.

Sa méthode algorithmique procède de la recherche de l'exactitude et de la précision, comme les artistes naturalistes ou plus récemment les hyperréalistes. La différence est que l'objet de son art vit non pas dans le monde réel, mais dans l'abstrait algébrique et arithmétique. Plusieurs dizaines de familles d'images, chacune fondée sur une idée mathématique traduite en algorithme et déclinée en une multitude d'instances, ont été créées par Jos Leys et ses assistants de silicium. Elles sont exposées sur plus de deux mille images consultables et téléchargeables : http://www.josleys.com/.

L'outil de base de Jos Leys est un logiciel nommé *Ultrafractal*, conçu par Frederik Slijkerman. Il faut cependant mettre en garde les artistes en herbe qui voudraient suivre les traces de Jos Leys. Les logiciels (dont *Ultrafractal*) vous permettent sans peine de produire vos propres images fractales (lesquelles, hélas, ressemblent à celles produites par n'importe quel autre utilisateur du même logiciel), mais pour obtenir des résultats originaux, un travail important est nécessaire.

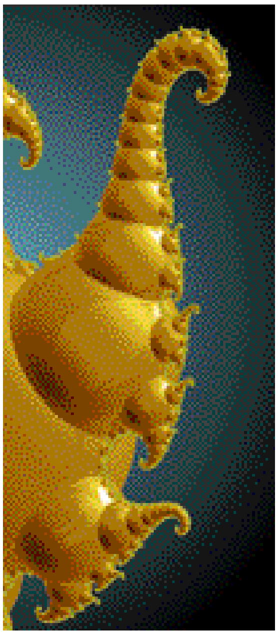
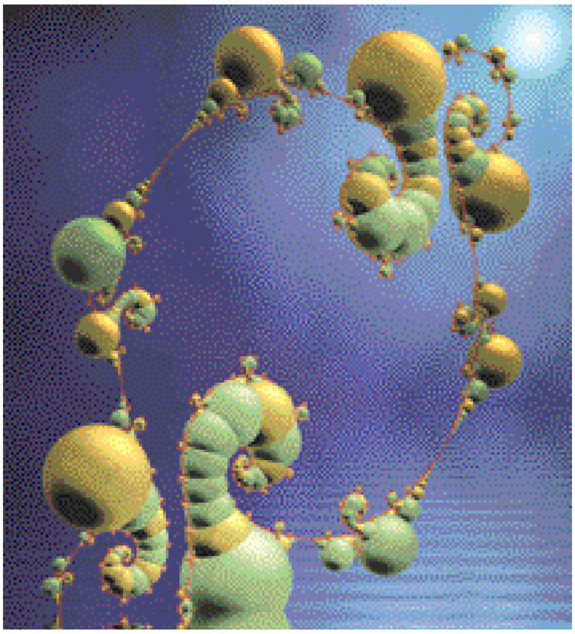
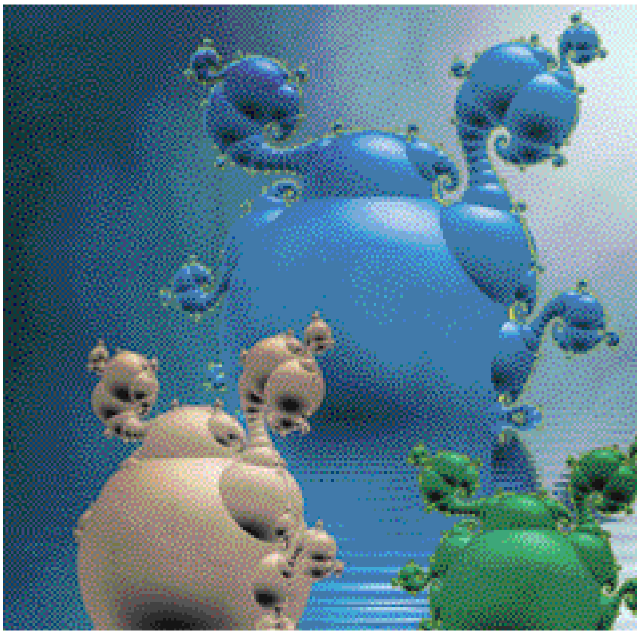
Jos Leys, pour chaque création, écrit un programme particulier (destiné à *Ultrafractal*) de plusieurs pages qui traduit les idées mathématiques et algorithmiques qu'il veut visualiser. Il y incorpore des modules spécifiques, par exemple pour le calcul des ombres et des reflets, modules qu'il a lui-même soigneusement et longuement mis au point et qui jouent un rôle central pour le rendu final. C'est tout un travail d'apprentissage graphique et informatique de plusieurs années qui a conduit Jos Leys à la perfection technique de ses créations actuelles. Les images de Jos Leys possèdent une allure singulière et inimitable, un « look » qui est sa signature.

Parmi les domaines explorés par Jos Leys, il y a les représentations du plan hyperbolique (utilisées dans cette rubrique pour illustrer l'article de février 2004), les figures impossibles de taille infinie (des jeux originaux avec la perspective), les pavages non périodiques de Penrose (pour lesquels Jos Leys a écrit ses propres algorithmes), les diagrammes de Voronoï (permettant des mosaïques d'un type nouveau), les entrelacs celtiques (poussant cet art traditionnel dans de nouvelles directions), les pavages du plan, les jeux combinatoires à base de spirales et de cercles. Plusieurs catégories nouvelles de fractales (tunnels, plantes, monstres à tentacules, etc.) ont aussi été découvertes par Jos Leys. L'un de ses dessins a remporté le prix 2002 *Best in show* du *Museum of Computer Art*. D'autres ont été utilisés pour des couvertures de livres, des affiches et des illustrations diverses (en général liées aux mathématiques).

Les cercles tangents du théorème de Koebe

Nous allons décrire quelques créations récentes de Jos Leys en nous attachant particulièrement aux jeux algorithmiques qu'il pratique avec des cercles et des sphères et que, depuis trois ans, il perfectionne en dialoguant avec des mathématiciens.

Un problème très simple se pose concernant les familles de cercles tangents : peut-on les disposer selon des schémas complexes (des graphes disent les mathématiciens) fixés ? Autrement dit, un ensemble de nœuds étant donné N_1, N_2 ... N_p,

ainsi que des liens entre ces nœuds (par exemple N_1 est relié à N_2, N_3 est relié à N_5, etc.), à quelles conditions sur le graphe initial peut-on construire des cercles C_1, C_2, ..., C_p – un exactement par nœud – de façon que C_i soit tangent à C_j, si et seulement si N_i est relié à N_j ? On ne veut que des cercles tangents et on leur impose un schéma de relations mutuelles fixé, sans préciser les rayons des cercles, car c'est en jouant sur eux qu'on espère ajuster l'empilement de cercles.

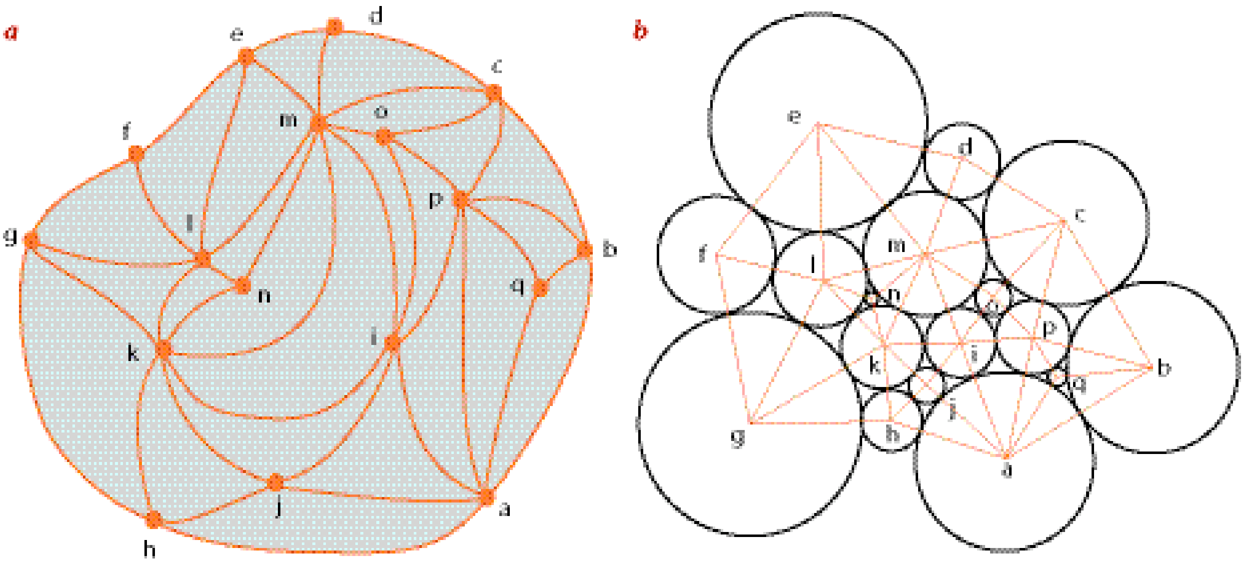
L'intérêt mathématique du problème envisagé dès 1936 par Paul Koebe et redécouvert par le grand mathématicien William Thurston en 1985 est plus profond qu'il n'y paraît. En effet, les réseaux de cercles tangents servent dans les problèmes d'approximation de surfaces mathématiques et ont donné naissance, dans les années 1990, à la théorie des fonctions analytiques discrètes aujourd'hui en plein essor. (Le livre récent de Kenneth Stephenson *Introduction to Circle Packing* donne une présentation complète de cette théorie.) On peut d'ailleurs utiliser ces empilements de cercles pour dessiner à plat des surfaces complexes, en particulier pour représenter des parties du cerveau humain. Il en résulte de nouvelles méthodes de visualisation des aires corticales qui font progresser l'imagerie cérébrale, discipline clef des neurosciences.

La réponse à la question posée sur les réseaux de cercles tangents est simple : si le graphe est composé uniquement de triangles (le graphe n'est qu'une série de triangles collés par les côtés, un triangle ayant au plus un côté non collé à un autre triangle) et qu'il peut être dessiné sur un plan, alors quelles que soient sa forme et sa taille, il est possible de trouver des cercles associés aux nœuds du graphe et tangents deux à deux exactement selon le schéma fixé par le graphe. La condition est à la fois nécessaire et suffisante.

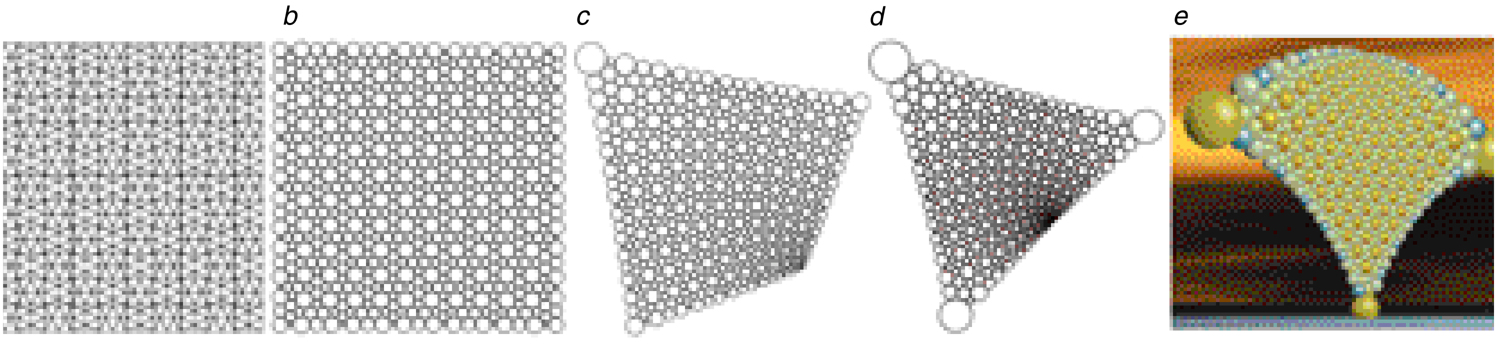
Les cercles situés sur la frontière du réseau peuvent être disposés angulairement comme on le veut quand on place les cercles, et la solution pour chaque graphe triangulaire et chaque système d'angles du pourtour est alors essentiellement unique, car on passe d'une solution à une autre par des transformations connues d'avance. La difficulté reste cependant de déterminer et de dessiner réellement l'empilement de cercles d'un graphe fixé, car dans un tel système de cercles, les rayons dépendent tous les uns des autres et il faut ajuster soigneusement ces rayons pour que les cercles se disposent correctement : le graphe constitue une contrainte globale qu'on ne peut pas traiter localement nœud par nœud ; la solution vient d'un coup ou pas du tout. Il faut maîtriser une subtile chorégraphie pour que l'ensemble des cercles recherchés colle au schéma fixé par le graphe triangulaire.

Un algorithme fonctionnant par approximations successives et traitant efficacement même des empilements de plusieurs centaines de cercles a été décrit par Charles Collins et Kenneth Stephenson en 2003. Jos Leys utilise cet algorithme pour produire d'immenses empilements de cercles parfaitement tangents, globalement solidaires et harmonieusement composés. Ces empilements de cercles peuvent être convertis en empilements de sphères, qui eux-mêmes peuvent être déformés en de nouveaux empilements de sphères conduisant à des sculptures virtuelles fascinantes et d'une beauté surnaturelle *(voir la figure 3)*.

Ces créations récentes de Jos Leys sont remarquables, car elles illustrent le double lien qui réunit ici l'art et les mathématiques : l'artiste produit des images qu'on peut interpréter comme des matérialisations d'idées profondes (celles de la théorie des fonctions analytiques discrètes) et dont la beauté résulte de cette profondeur que notre esprit ressent inconsciemment. De plus, pour produire ces images, l'artiste doit s'appuyer sur les résultats des chercheurs eux-mêmes et donc en un certain sens, son art est un produit de



2. Empilements de cercles tangents. Si on se donne un graphe composé uniquement de triangles (aux côtés éventuellement courbes comme sur l'image *a*), il est possible, d'après le théorème de Koebe (1936), de construire un empilement de cercles tangents correspondant au graphe : à chaque nœud du graphe est associé un cercle, et deux cercles sont tangents si et seulement s'ils sont reliés dans le graphe par un arc. Une certaine liberté existe dans la disposition des cercles, mais elle est réduite. On peut fixer les angles que font les centres des cercles du pourtour (a, b, c, ..., h), en revanche, ces angles étant fixés, les rayons des cercles et la position des centres des autres cercles sont déterminés *(b)*. Trouver ces rayons et ces centres est délicat. Jos Leys utilise pour cela un algorithme mis au point par Charles Collins et Kenneth Stephenson en 2003. Le résultat de l'application de cet algorithme à un graphe triangulaire complexe est un réseau de cercles tangents souvent intéressant et esthétique. C'est l'une des techniques utilisées par Jos Leys pour concevoir la base de ses images.



3. Étapes de la construction de Jos Leys d'une image numérique en utilisant le théorème de Koebe. On part d'un graphe triangulaire *(a)*, puis on constitue l'empilement de cercles tangents *(b)* associé par le théorème de Koebe. On déforme l'empilement *(c* et *d)* en jouant sur les angles des quatre coins (l'angle en bas à droite passe de 90 à 180 degrés). Cela entraîne la modification de tous les rayons et positions des cercles tangents qui sont calculés à chaque étape par l'algorithme de C. Collins et K. Stephenson. On remplace alors chaque cercle par une sphère, puis on transforme cet empilement par inversion et on le dispose dans un décor *(e)*.

la recherche mathématique qui, pour une fois, ne reste pas confinée dans les laboratoires universitaires.

Comme dans tous les arts géométriques, une fois la technique bien en main, la créativité prend les commandes. Les combinaisons possibles sont innombrables pour le graphe triangulaire initial, pour l'introduction des sphères et la transformation globale des structures construites. C'est là que l'artiste fait œuvre d'imagination et les sculptures numériques proposées par Jos Leys sont le résultat d'astucieuses et minutieuses mises en place opérées par l'artiste, dont seules les plus abouties sont conservées et présentées au public *(voir la figure 3)*.

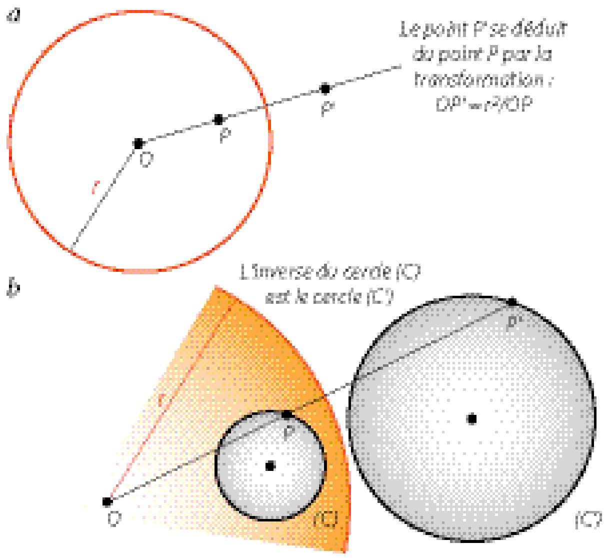
Les spirales de Doyles

Fasciné par les ensembles de cercles tangents, Jos Leys a aussi créé une seconde série d'œuvres *(voir la figure 5)* fondées sur une spirale découverte par le mathématicien Peter Doyle. La question qui a conduit à la découverte des spirales de Doyle est la suivante : existe-t-il une condition simple assurant que 6 cercles tangents entourant un cercle central (supposé de rayon 1) s'ajustent parfaitement et composent une « fleur » de 7 cercles ?

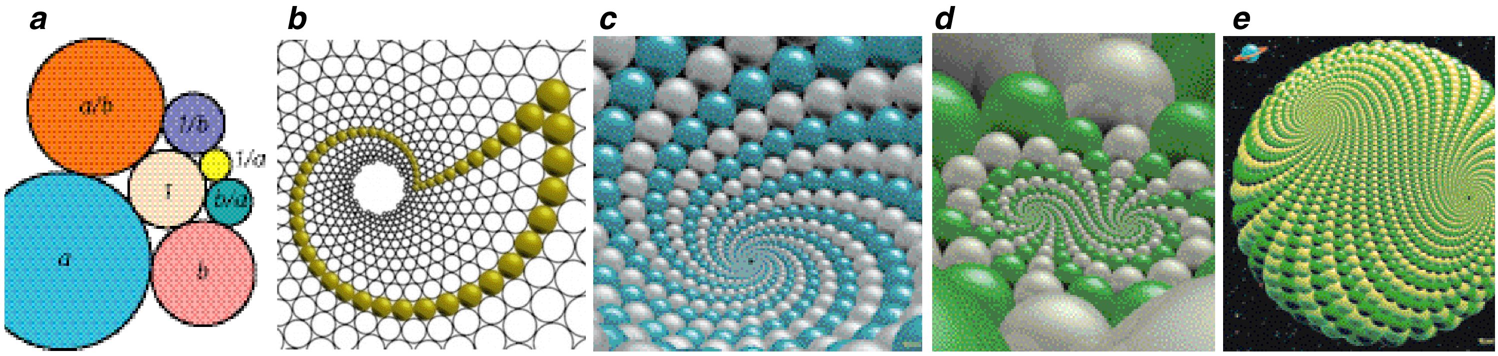
La réponse est assez simple (la démonstration l'est moins !) : il suffit que les rayons aient pour valeur a, b, b/a, $1/a$, $1/b$, a/b où a et b sont deux nombres positifs quelconques *(voir la figure 5)*. Grâce à cette relation utilisée plusieurs fois de suite, on peut construire des ensembles de cercles tangents, où chaque cercle est entouré de six autres cercles exactement. Certains de ces ensembles de cercles ne sont « cohérents » que localement et produisent des familles de cercles qui finissent par se recouper après plusieurs étapes de construction. D'autres, en revanche, s'enroulent autour d'un point central en une spirale infinie sans jamais que deux cercles de la construction infinie ne se coupent. Pour que cela se produise, il faut qu'il existe deux entiers n et m tels que $a^n = b^m$. Une telle spirale de cercles tangents, magnifique en elle-même, se prolonge à l'extérieur jusqu'à l'infini par des cercles de plus en plus grands, constituant au total un pavage du plan tout entier par des cercles tangents.

On peut utiliser la spirale de Doyle pour construire de magnifiques images, mais on peut aussi la transformer en une double spirale encore plus étonnante et harmonieuse. Pour cela, on applique une inversion par rapport à un cercle passant par le centre de la spirale. En se fondant sur cette double spirale uniquement basée sur un réseau infini de cercles tangents – chaque cercle exactement entouré de six autres – Jos Leys s'est amusé à rendre hommage à Maurits Cornelis Escher, le célèbre graveur hollandais qui lui aussi piochait dans les mathématiques des structures pour la composition de ses œuvres. Jos Leys a repris un des pavages de Escher construit sur un schéma hexagonal : chaque hexagone est entouré par six hexagones que Escher a remplacés par un petit personnage s'emboîtant avec les copies de lui-même. Jos Leys a alors glissé le motif du petit personnage de Escher dans la double spirale infinie déduite de la spirale de Doyle *(voir la figure 6)*.

Le résultat qui aurait enchanté Escher fait partie d'une série de 64 images que Leys a engendrées en combinant des idées de Escher avec ses propres idées et techniques. La série qui s'intitule modestement *Escher Imitations* se trouve en : http://www.josleys.com/creatures62.htm



4. L'inversion est la transformation reine des dessins de Jos Leys. Inventée par le géomètre allemand Rudolf Steiner (1796-1863), elle est spécifiée *(a)* par le cercle d'inversion *(en rouge)* de centre *O* et de rayon *r*. L'inversion transforme un cercle *C* en un cercle *C'* *(b)* et dans l'espace une sphère en une autre sphère. L'inverse du cercle d'inversion est le cercle lui-même (invariant) par rapport à la transformation. Quand le pôle d'inversion *O* est situé sur un cercle *C*, son inverse est une droite.



5. Spirales de Doyle. Si on prend un cercle de rayon 1 et qu'on place autour de lui six cercles de rayons *a, b, b/a,* 1/*a*, 1/*b*, *a/b*, ceux-ci s'ajustent parfaitement créant une fleur à six pétales *(a)*. S'il existe deux entiers *n* et *m* tels que $a^n = b^m$, alors on peut créer d'autres cercles selon la même règle (utilisée itérativement), le tout constituant une spirale infinie parfaite de cercles tangents, chaque cercle ayant exactement six voisins. Il s'agit de la spirale de Doyle *(b)*. Jos Leys utilise cette spirale harmonieuse, et – par exemple en remplaçant les cercles par des sphères – produit d'étonnants arrangements de sphères miraculeusement ajustées *(c)*. Partant d'une spirale de Doyle et opérant une inversion dont le cercle d'inversion (invariant) passe par le centre de la spirale, on obtient un autre ensemble de cercles mutuellement tangents (car une inversion transforme les cercles en cercles, et préserve la propriété d'être tangent) qui cette fois est une spirale double *(d)*. En déplaçant cette double spirale sur une sphère, on obtient le magnifique assemblage de l'image *(e)*.

Aussi étrange que cela puisse paraître, il est possible de remplir complètement une sphère à l'aide de sphères plus petites, sans laisser le moindre espace vide et sans que deux sphères ne se coupent. Bien sûr, il faut pour cela utiliser une infinité de sphères et disposer d'une méthode systématique de remplissage. Le problème est en fait la traduction en trois dimensions du problème du remplissage d'un cercle par des cercles qui fut étudié dans les années 1980 (il est connu sous le nom du « problème de la baderne d'Apollonius »).

Le remplissage des sphères

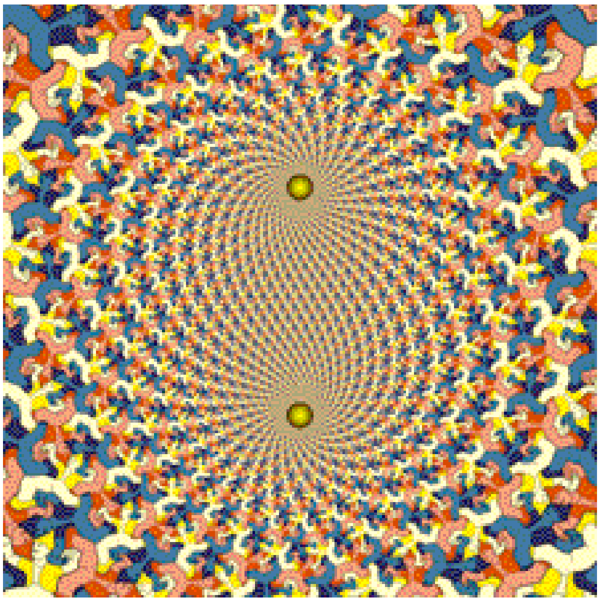
En 2003, Reza Mahmoodi Baram et Hans Herrmann ont proposé une famille de méthodes élégantes permettant le remplissage de la sphère. Leur solution est fondée sur l'utilisation des cinq polyèdres réguliers de Platon : le tétraèdre, l'octaèdre, le cube, le dodécaèdre et d'icosaèdre. L'idée est d'utiliser quelques sphères initiales dont les centres sont placés aux sommets d'un de ces polyèdres et d'effectuer une série (finie) d'inversions (en trois dimensions) de ces sphères initiales. Les sphères initiales en donnent de nouvelles qui lorsque l'on applique à nouveau les mêmes inversions en donnent encore de nouvelles, etc. Petit à petit, une quantité de sphères de plus en plus grande est définie et elles occupent tout l'intérieur de la sphère qu'on cherchait justement à remplir.

Les sphères initiales et les sphères définissant les inversions doivent être soigneusement choisies pour que la méthode fonctionne, mais lorsque c'est le cas on obtient que les sphères ajoutées étape par étape remplissent précisément tout le volume de la sphère de départ sans jamais se couper entre elles et sans laisser le moindre espace vide.

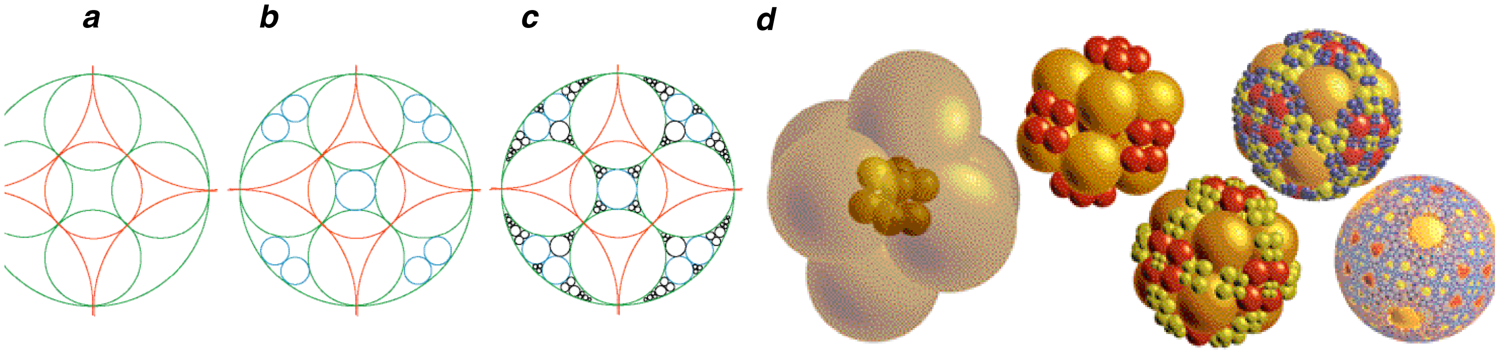
Une découverte étrange a alors été faite. Lorsque l'on part de l'octaèdre et qu'on applique le procédé (à partir des sphères soigneusement calculées pour le remplissage), on obtient un système de sphères qui constituent un roulement à billes infini et bicolore. Les sphères peuvent en effet se regrouper en deux catégories, disons les blanches et les jaunes, ceci d'une façon telle qu'une sphère jaune ne touche que des sphères blanches et qu'une sphère blanche ne touche que des sphères jaunes. Cette séparation bi-chromatique de l'espace qui semblait *a priori* impossible a surpris les chercheurs qui l'ont découverte, mais ils ont encore été plus surpris de s'apercevoir que l'ensemble de toutes les sphères constituait un roulement à billes parfait : lorsque l'on fait tourner une sphère sur elle-même, son mouvement entraîne celui de toutes les autres sphères dans une multitude de rotations sans glissement. Aucune sphère n'a besoin que les sphères qui lui sont tangentes ne glissent au point de contact qu'elles ont ensemble et toutes les sphères (qui pourtant remplissent l'espace) tournent donc ensemble de façon coordonnée et compatible sans le moindre frottement.

Ces invraisemblables amoncellements des billes sont bien évidemment difficiles à imaginer. L'aide de l'ordinateur se révèle indispensable et Jos Leys ne pouvait manquer de relever le défi. Les remplissages de sphères par d'autres sphères sont obtenus en dessinant plusieurs centaines de milliers de sphères à chaque fois (et non pas une infinité bien sûr !).

Ces fractales d'un type nouveau – dont la dimension fractale a été calculée – qui présentent une beauté « mathé-



6. Hommage à Escher constitué par une spirale de Doyle.



7. Remplir une bille avec des billes. Pour remplir un cercle avec des cercles, on part du grand cercle vert où l'on place 4 autres cercles verts, tangents entre eux et au cercle de départ. On considère les cinq cercles orthogonaux à ces cercles dessinés en rouge sur l'image *(a)*. Ces cercles déterminent cinq inversions Inv1, Inv2, Inv3, Inv4, Inv5. On applique ces cinq inversions aux cercles verts *(b)*. Cela donne neuf nouveaux cercles bleus (on devrait en obtenir 20, mais certains cercles sont invariants, et d'autres sont obtenus plusieurs fois). Les nouveaux cercles sont tangents aux cercles verts précédents. On recommence, ce qui donne de nouveaux cercles noirs *(c)*. Petit à petit tout l'intérieur du cercle vert initial se remplit par des cercles. Adaptée à l'espace, cette méthode permet de remplir une sphère par des sphères. Pour trouver des sphères initiales convenables, cinq solutions sont possibles, chacune associées à un polyèdre régulier. Les images *d* représentent la construction obtenue à partir du cube (la sphère que l'on remplit n'est pas dessinée pour une meilleure lisibilité du schéma).

matique » étrange et déconcertante que Jos Leys nous fait apprécier.

David Mumford médaillé Field 1974 (la médaille Field est une sorte de prix Nobel pour les mathématiques) avec deux de ses collègues Caroline Series et David Wright sont eux aussi des passionnés de cercles et d'ordinateurs.

Ce que Felix Klein n'a jamais vu

Persuadés que l'ordinateur est un outil d'exploration et d'aide à la compréhension incomparable dans certains domaines des mathématiques, ils ont entrepris dans les années 1980 l'étude d'une idée sur laquelle le mathématicien Felix Klein avait travaillé en utilisant les moyens de son époque, mais sans pouvoir l'approfondir vraiment à cause de l'absence d'outils de calcul et de visualisation convenables. Le résultat de cette recherche est un livre mathématique d'un type nouveau *Indra's Pearl. The Vision of Felix Klein*, dont le titre évoque Dieu Bouddhiste Indra dont chacune des perles de son collier reflète l'Univers tout entier. Au détour des pages de l'ouvrage, les illustrations produites par l'ordinateur éclairent le texte et y jouent un rôle central pour soutenir l'intuition et aider l'assimilation des concepts. C'est d'ailleurs en dessinant ces images et en les faisant dessiner par l'ordinateur que le travail des chercheurs a longuement mûri et s'est progressivement précisé pendant plus de dix années.

L'idée de l'utilisation répétée d'inversions (mentionnée à propos du remplissage d'une sphère par une infinité de sphères plus petites) est explorée d'une manière systématique : que donne la composition les unes avec les autres de plusieurs inversions (ou transformations géométriques intéressantes) ? Que devient un point lorsqu'on le fait passer dans une succession infinie de transformations prises dans une famille donnée ? Que devient un ensemble dans la même machine à déformer (problèmes des ensembles limites) ? Quelles sont les configurations invariantes par l'application d'une famille de telles transformations ? Tout ce domaine d'idées et de problèmes géométriques où on retrouve la baderne d'Apollonius et bien d'autres formes fractales a été examiné dans le livre avec soin, puis par Jos Leys qui en a tiré une série d'images exceptionnelles qui sont peut-être les plus réussies de ses œuvres *(voir les dessins de la figure 1)*. Remarquons que les images de cette série sont à la fois d'un esthétisme classique, les cercles et les sphères sont les objets géométriques qu'on y rencontre le plus, mais en même temps de type fractal, les empilements infinis sont la règle et l'autosimilarité (la présence dans une figure de parties qui sont la version réduite de la totalité) s'y retrouve partout.

Jouant par exemple à partir d'une figure en deux dimensions composée de cercles à lui créer une troisième dimension (en plaçant une sphère sur chaque cercle), découpant des parties de ces ensembles limites que Klein avait envisagés sans jamais les voir, Jos Leys compose des paysages inconnus, habités par des êtres aux formes infiniment harmonieuses et totalement nouvelles à nos yeux. Aucun artiste, autre qu'un mathématicien, n'aurait jamais pu produire ces éblouissantes images où la virtuosité du mathématicien s'accordant avec la rapidité de l'ordinateur crée de l'absolu et de l'éternel : oui, le monde mathématique est magnifique et l'ordinateur est l'œil dont nous avons besoin pour voir et ressentir cette beauté inouïe plus parfaite que toutes les beautés terrestres.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Univ. de Lille.

KENNETH STEPHENSON, *Introduction to Circle Packing : The Theory of Discrete Analytic Functions*, Cambridge University Press, 2005.

KENNETH STEPHENSON, *Circle Packing : A Mathematical Tale, Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 50, 11, 2003, pp.1376-1388

CHARLES COLLINS, KENNETH STEPHENSON, *A Circle Packing Algorithm, Computational Geometry : Theory and Applications*, 25 (2003), pp. 233-256 www.math.utk.edu/ffkens/

REZA MAHMOODI BARAM, HANS J. HERRMANN, *Self-Similar Space-Filling Packing in Three Dimensions*, 2003 : www.ica1.uni-stuttgart.de/ffhans/p/325.pd

REZA MAHMOODI BARAM, HANS J. HERRMANN, *Space-Filling Bearings in Three Dimensions*, 2003 : www.ica1.uni-stuttgart.de/ffreza/bearings.pdf

JOS LEYS, *Sphere Inversion Fractals, Computer and Graphics*, (Vol 29-3, Juin 2005)

JOS LEYS, Plus de 2000 dessins : http://www.josleys.com/index2.html

The infinite fractal loop (pour accéder rapidement aux meilleures productions de l'art fractal) : http://www.fractalus.com/cgi-bin/glist

Ultrafractal : http :www.ultrafractal.com/